Alberto E.J. Manacorda

EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO Y APLICACIONES

2007

EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO Y APLICACIONES

PRIMERA PARTE

Alberto E.J. Manacorda*

** Ingeniero Geógrafo*
Profesor Titular de Análisis Matemático II
Facultad de Ciencias Económicas y Estadística
Universidad Nacional de Rosario

2007

EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO Y APLICACIONES

Nota introductoria

Este escrito comienza con una explicación y ejemplo del método de aproximaciones sucesivas, pero si bien éste es usado con excelentes resultados en la resolución de ecuaciones y para establecer teoremas de existencia para ecuaciones diferenciales, nosotros reformulamos el citado método en una forma que amplia mucho el alcance de sus aplicaciones. Para esto se recuerdan, en la primera parte, algunos conceptos fundamentales indispensables y se define qué se entiende por "operador de contracción". Valiéndonos de los conceptos antes expuestos se demuestra el "Teorema del punto fijo".

Luego haciendo uso del mismo en espacios de Banach, se procede a demostrar, en la segunda parte que aparecerá en el próximo número, cuatro teoremas de existencia y unicidad, de relevante importancia en matemática.

Deseo aprovechar la oportunidad para agradecer al Prof. Dr. Domingo A. Tarzia, sus opiniones y sugerencias en el tratamiento de los temas aquí expuestos.

Al hacerme responsable de cualquier error que pudiera haberse deslizado, espero que este modesto trabajo, sirva para consolidar conocimientos en los lectores que encuentran en los temas de matemática, la profunda satisfacción que yo siento con los mismos.

A.E.J.M.

PRIMERA PARTE

1.- Método de las aproximaciones sucesivas

El método de las aproximaciones sucesivas, es un método iterativo aplicable a muchos problemas. Fue publicado por primera vez por Liouville en 1838 en conexión con el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Luego fue extendido por J. Caqué en 1864, L. Fuchs en 1870 y G. Peano en 1888 al estudio de las ecuaciones diferenciales de orden n. En 1890 Émile Picard amplió el método al abarcar también las ecuaciones diferenciales no lineales. En mérito a esta importante contribución, el método pasó a conocerse como método de Picard. El interés del método no es sólo teórico sino que también se usa para obtener aproximaciones numéricas para resolver ecuaciones.

El método consiste en tomar una supuesta solución de una ecuación y sustituirla en alguno de los miembros de la misma y obtener una nueva ecuación que ya no contiene (en uno de sus miembros) la incógnita. Obtenido un nuevo valor, éste se sustituye una vez más en la ecuación para lograr un tercer valor y así sucesivamente.

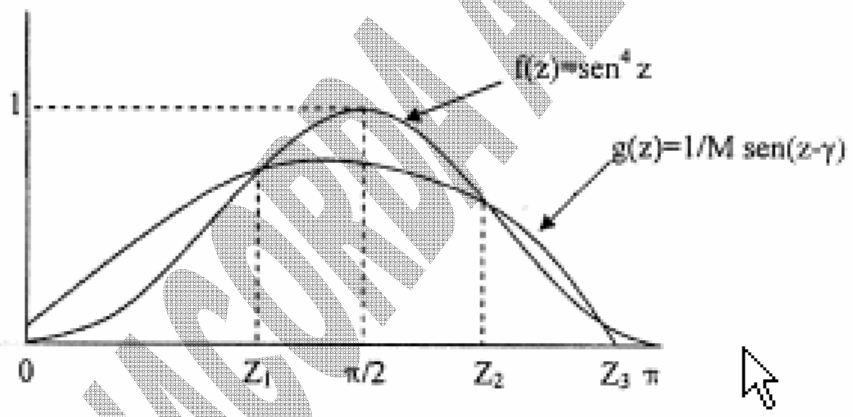
Veamos un ejemplo. En Astronomía, para el cálculo de órbitas de planetas, en el sistema solar, aparece la ecuación:

$$sen(z-\gamma)=M\ sen^4 z$$

cuya interpretación gráfica puede lograrse haciendo

$$f(z)=sen^4 z$$

$$g(z)=\frac{1}{M}sen(z-\gamma)$$



Las abscisas de intersección de estas curvas son las soluciones del problema.

Desde el punto de vista práctico es posible resolver la ecuación por aproximaciones sucesivas; para ello se requiere un valor aproximado de z. En este caso se puede tomar como aproximación inicial: $z_0=\gamma$. Para efectuar las aproximaciones sucesivas, definimos

$$sen(z_1-\gamma)=M\ sen^4 z_0$$

De las soluciones posibles en el intervalo $[0,\pi]$ se elige como z_1 el valor más próximo a z_0 (por la naturaleza del problema). Luego hacemos:

$$sen(z_2-\gamma)=sen^4 z_1$$

y calculamos z_2, escogiendo el valor más cercano a z_1.

Así, sucesivamente

$$sen(z_n-\gamma)=sen^4 z_{n-1}$$

La sucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, converge a la solución buscada.

Si bien el método de aproximaciones sucesivas es usado con excelentes resultados en la solución de ecuaciones y para establecer teoremas de existencia para ecuaciones diferenciales, nosotros reformularemos el citado método en una forma que amplía mucho el alcance de sus aplicaciones.

Antes de presentar esta reformulación recordaremos algunos conceptos que serán indispensables.

2.- Definiciones

2.1.- Diremos que en un conjunto E está definida una distancia d, si a todo par x, y de puntos de E, es decir, a todo $(x,y) \in E \times E$, le corresponde un número real positivo o nulo $d(x,y)$ que satisface las condiciones siguientes:

a) $d(x,x) = 0$

b) $d(x,y) > 0$ si $x \neq y$

c) $d(x,y) = d(y,x)$

d) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (desigualdad triangular)

cualesquiera sean $x, y, z \in E$.

2.2.- Un espacio métrico es un conjunto E, no vacío, dotado de una función d de $E \times E$ en R, denominada "métrica del espacio" que satisface las propiedades detalladas en 2.1. Designaremos un espacio métrico por medio de la escritura (E,d).

2.3.- Para formular el método de aproximaciones sucesivas en forma general, trabajaremos con espacios lineales. Sea L un espacio lineal cualquiera. Una función real N definida en L se llama "norma", si cumple las propiedades siguientes:

a) $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b) $N(x) \geq 0$ para cada $x \in L$

c) $N(\alpha x) = |\alpha| N(x)$ siendo α un escalar

d) $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

Un espacio vectorial con una norma asignada se llama "espacio vectorial normado".

La norma del elemento $x \in L$ se denota mediante el símbolo $\|x\|$.

2.4.- Sea E un espacio vectorial sobre R, cuyos elementos son designados por $x, y, z, \ldots$ y los números reales por $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Supongamos definida una distancia d en E y consideremos las distancias particulares que satisfacen las condiciones siguientes:

a) $d(x,y) = d(x+z, y+z)$

b) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$

cualesquiera sean $x, y, z \in E$, $\alpha \in R$; las cuales son posibles porque en E existen las leyes: $(x,y) \to x+y$, $(\alpha x) \to \alpha x$, cosa que no ocurre en un conjunto cualquiera.

Si en a) tomamos $z = -y$ (que es posible por tratarse de un espacio vectorial) tenemos:

$$d(x,y) = d(0, x-y) \tag{1}$$

Se tiene también:

$$d(\alpha x,\alpha y)=d(0,\alpha x-\alpha y)=d(0,\alpha(x-y))$$

Además, de la desigualdad triangular:

$$d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$$

se obtiene sustituyendo: $x=0$, $y=x+y$

$$d(0,x+y)\le d(0,z)+d(z,x+y)=d(0,z)+d(0,x+y-z)$$

y tomando $z=x$, resulta:

$$d(0,x+y)\le d(0,x)+d(0,y)$$

Resumiendo, si se pone $N(x)=d(0,x)$ se verifican las propiedades del punto 2.3. para la norma N, siendo E un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$, donde de (1) se tiene:

$$d(x,y)=N(x-y)=\|x-y\|$$

que define una distancia en E, distancia d deducida de la norma N.
Por otra parte, todo espacio normado se convierte en un espacio métrico si para dos elementos cualesquiera $x,y\in E$ se define: $d(x,y)=\|x-y\|$
La validez de los axiomas de espacio métrico se desprende directamente de las propiedades a) ... d) de la norma (2.3.)
En los espacios normados subsisten pues todos los conceptos y resultados de los espacios métricos.

2.5.- Para trabajar en espacios lineales de funciones reales continuas en un intervalo cerrado y acotado I, utilizaremos la "norma del máximo" o "máxima norma". Designemos con $C(I)$ el espacio lineal de las funciones reales continuas en un intervalo compacto I (que es cerrado y acotado).
Si $f\in C(I)$, definimos:

$$\|f\|=\max_{x\in I}|f(x)|$$

indicando así el máximo valor absoluto de f en I. Esta goza de las cuatro propiedades fundamentales de la norma N (punto 2.3). En consecuencia

$$d(f,g)=\|f-g\|=\max_{x\in I}|f(x)-g(x)|$$

define una métrica d en $C(I)$.

2.6.- En un espacio métrico (E,d) una sucesión $\{x_n\}$ se llama "sucesión de Cauchy" (o fundamental), si para cada $\varepsilon>0$ existe un entero $P(\varepsilon)$, tal que las relaciones $n\ge P$ y $m\ge P$ implican: $d(x_n,x_m)<\varepsilon$ (denominada condición de Cauchy).

2.7.- Un espacio métrico E se dice "completo" si toda sucesión de Cauchy en E, es convergente hacia un punto de E.
• Se denomina espacio de Banach a todo espacio normado y completo; es decir, un espacio en el que está definida una norma y toda sucesión de Cauchy es convergente en dicho espacio.

MATERIAL DE APOYO

3.- Operadores de contracción

3.1.- Sea $T:S\to S$ una función de un espacio métrico (S,d) en sí mismo. La función T se denomina "contracción" o también "operador de contracción" de S si existe un número $0<k<1$, tal que:

$$d\big(T(x),T(y)\big)\le k\ \ d(x,y)\qquad \forall x,y\in S$$

Es evidente que una contracción de un espacio métrico es uniformemente continua. La constante k se llama coeficiente de contracción o constante de contracción para T.

3.2.- En este trabajo consideraremos el espacio lineal normado $C(I)$ de todas las funciones reales continuas en un intervalo compacto I en el que $\|f\|$ es la norma del máximo. En consecuencia $T:C(I)\to C(I)$, cuyo dominio es $C(I)$ y su recorrido un subconjunto de $C(I)$, será una contracción si existe una constante k, $0<k<1$, tal que para todo par de funciones f y g de $C(I)$, se cumpla:

$$\|T(f)-T(g)\|\le k\,\|f-g\|$$

La desigualdad anterior es válida si y sólo si

$$\big|T(f)(x)-T(g)(x)\big|\le k\,\|f-g\|\qquad \forall x\in I$$

3.3.- Ejemplos:

a) Sea f una función arbitraria en $C(I)$ y $T(f)(x)$ se define para cada x de I por la fórmula $T(f)(x)=\alpha f(x)$, donde α es una constante. Puesto que

$$\big|T(f)(x)-T(g)(x)\big|=|\alpha|\,\big|f(x)-g(x)\big|\le|\alpha|\,\|f-g\|$$

el operador T es un operador de contracción si y sólo si $\alpha<1$.

b) Consideremos:

$$T(\varphi)(x)=b+\int_a^x f\big[t,\varphi(t)\big]dt$$

donde f satisface la condición de Lipschitz de la forma

$$\big|f(x,y)-f(x,z)\big|\le h\,|y-z|\qquad \forall x\in I$$

siendo y,z reales cualesquiera y $h>0$ constante.

Indicaremos con $l(I)$ la longitud del intervalo I.

Entonces, para todo x de I, tenemos:

$$\big|T(\varphi)(x)-T(\eta)(x)\big|=\left|\int_a^x\big\{f\big[t,\varphi(t)\big]-f\big[t,\eta(t)\big]\big\}dt\right|\le h\left|\int_a^x\big|\varphi(t)-\eta(t)\big|dt\right|\le$$

$$\le h\|\varphi-\eta\|\left|\int_a^x dt\right|\le hl(I)\|\varphi-\eta\|$$

Luego, si $hl(I)<1$, T es un operador de contracción con constante de contracción $k=hl(I)$.

4.- Teorema del punto fijo

4.1.- Definición: Sea $f:S\to S$ una función de un espacio métrico (S,d) en sí mismo. Un punto P de S es un "punto fijo" de f si $f(P)=P$.

MANCORDA ALBERTO

4.2.- Teorema: Una contracción T de un espacio métrico completo S, tiene un único punto fijo tal que $T(x)=x$.

Demostración: Sea x_0 un punto de S y consideremos $\{x_n\}$ la sucesión de iteraciones definida mediante la fórmula de recurrencia:

$$x_{n+1}=T(x_n) \quad , \quad n=0,1,2,...$$

Probaremos que $\{x_n\}$ converge a un punto fijo en S.

Haremos la demostración en tres etapas.

a) $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en S. En efecto, como

$$d(x_{n+1},x_n)=d(T(x_n),T(x_{n-1}))\le kd(x_n,x_{n-1}), \qquad \forall n\ge 1$$

y puesto que $d(x_n,x_{n-1})\le kd(x_{n-1},x_{n-2})$

es: $d(x_{n+1},x_n)\le k^2 d(x_{n-1},x_{n-2})$ y así sucesivamente.

Luego, por inducción resulta:

$$d(x_{n+1},x_n)\le k^n d(x_1,x_0)=ck^n$$

donde $c=d(x_1,x_0)$. Entonces, utilizando la desigualdad triangular hallamos, para $n+p > n$

$$d(x_{n+p},x_n)\le d(x_{n+p},x_{n+p-1})+...+d(x_{n+1},x_n)\le (k^{n+p-1}+k^{n+p-2}+...+k^n)c\le$$

$$\le\sum_{i=n}^{\infty}k^i c=\frac{k^n}{1-k}c$$

pues $\sum_{i=n}^{\infty}k^i=\sum_{i=0}^{\infty}k^i-\sum_{i=0}^{n-1}k^i=\frac{1}{1-k}-\frac{1-k^n}{1-k}=\frac{k^n}{1-k}$

Como $k^n\to 0$ cuando $n\to\infty$, queda probado que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

b) Puesto que S es completo, de a) surge la existencia de un elemento $x\in S$ tal que $x_n\to x$, y por ser T una contracción, T es una aplicación continua,

$$T(x)=T\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)=\lim_{n\to\infty}T(x_n)=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=x$$

luego x es un punto fijo de T.

c) Unicidad. Sean x y x' dos puntos fijos de T, entonces

$$0\le d(x,x')=d(T(x),T(x'))\le kd(x,x')$$

lo cual implica que $d(x,x')=0$, es decir $x=x'$.

De las relaciones obtenidas, se deduce además la estimación del error: $d(x,x_n)\le\frac{k^n}{1-k}c$ que decrece como una progresión geométrica de razón $0<k<1$.

4.3.- Antes de establecer un corolario que se desprende del teorema anterior, vamos a demostrar que el espacio lineal normado $C_{[a,b]}$ de todas las funciones reales continuas en el intervalo $[a,b]$, es completo. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy de $C_{[a,b]}$. Ello significa que $\forall\varepsilon>0$ existe un entero $P(\varepsilon)$ tal que $d(f_n,f_m)<\varepsilon$ siempre que $n,m\ge P(\varepsilon)$.

De aquí se deduce que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente. En este caso, su límite "f" será una función continua. En efecto, haciendo tender $m\to\infty$ en la

desigualdad anterior, obtenemos $d(f_n, f) < \varepsilon \quad \forall n > P(\varepsilon)$, lo cual significa que $\{f_n\}$ converge a f en el sentido de la métrica del espacio $C_{[a,b]}$:

$$d(f_n, f_m) = \|f_n - f_m\| = \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)|$$

4.4.- Corolario: Consideremos ahora el espacio lineal normado completo $C_{[a,b]}$ en el que $\|f\|$ es la norma del máximo.

Si $T: C_{[a,b]} \to C_{[a,b]}$ es un operador de contracción, existe una función y sólo una en $C_{[a,b]}$ tal que $T(f) = f$.

4.5.- Junto con la demostración de la existencia y unicidad de la solución de la ecuación $T(x) = x$, una contracción ofrece un método aproximado para buscar esta solución (el método de aproximaciones sucesivas).

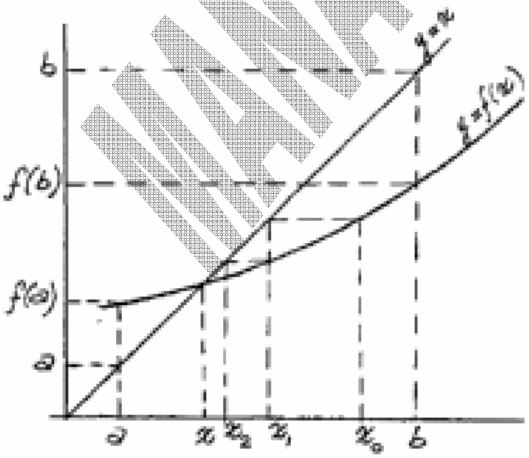
Veamos un ejemplo elemental. Sea f una función definida en el segmento $[a,b]$, que verifica la condición de Lipschitz

$$|f(x_2) - f(x_1)| \le h|x_2 - x_1|$$

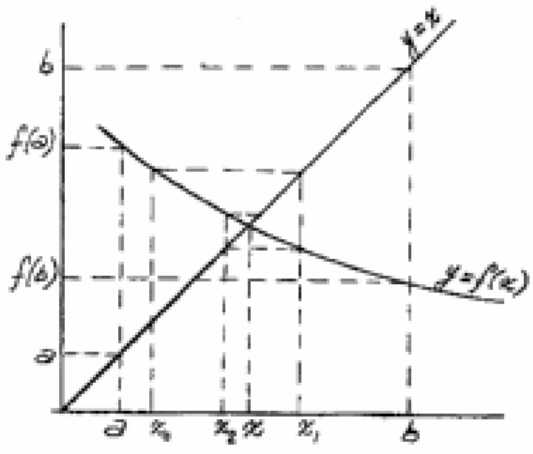
con una constante $h < 1$ y que transforma $[a,b]$ en sí mismo.

En este caso f es una contracción y de acuerdo al teorema del punto fijo, la sucesión $x_0,\ x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1), \ldots$ converge a la única raíz de la ecuación $x = f(x)$. En particular, la aplicación será una contracción, si la función tiene en $[a,b]$ una derivada $f'(x)$ tal que $|f'(x)| \le h < 1$.

En las figuras siguientes están representadas las aproximaciones sucesivas para los casos $0 < f'(x) < 1$ y $-1 < f'(x) < 0$.



Caso $0 < f'(x) < 1$



Caso $-1 < f'(x) < 0$

MANACORDA ALBERTO

En el próximo número presentaremos, como aplicaciones del tema aquí desarrollado, teoremas de existencia y unicidad, de destacada importancia en matemática. Ellos son:

- Teorema de existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial de primer orden.
- Un teorema de existencia de la función implícita.
- Teorema de existencia para ecuaciones integrales.
- Generalización (Teorema).
- Teorema de existencia para la ecuación integral de Volterra de segunda especie.
- Apéndice.

BIBLIOGRAFÍA

APOSTOL, Tom. "Análisis Matemático". Ed. Rverté S.A. Barcelona. 1962.

APOSTOL, Tom. "Calculus". Ed. Reverte S.A. Barcelona. 1992.

DIEUDONNÉ, J. "Fundamentos de análisis moderno". Ed. Reverté S.A. Barcelona.1966.

KOLMOGOROV, A.N. y FOMIN, S.V. "Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional". Editorial MIR. Moscú. 1975.

PISOT, C y ZAMANSKY, M. "Matemáticas Generales". Montaner y Simon S.A. Barcelona. 1966.

TARZIA, Domingo A. "Introducción a las inecuaciones variacionales elípticas y sus aplicaciones a problemas de frontera libre. Argentina". CONICET. Buenos Aires. 1981.

ZAMANSKY, Marc. "Introducción al álgebra y análisis moderno". Montaner y Simon S.A. Barcelona. 1970.